Funzioni in L^∞ e C^0; funzioni costanti a tratti, (quasi) regolate, Riemann integrabili e (quasi) continue; razionali ingrassati

A. Mennucci

2 marzo 2007

In tutto questo testo, Ω sarà un intervallo in $\mathbb{R}$. Consideriamo la retta reale $\mathbb{R}$ dotata della misura di Lebesgue λ; date $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili o Boreliane, scriviamo $f \cong g$ se $f = g$ quasi ovunque.

In questo documento studiamo spazi di funzioni Boreliane su Ω, dotati di metriche "uniformi'.

Definiamo spazi di funzioni regolate e "quasi regolate".

Studiamo le relazioni di inclusione fra questi spazi e gli spazi di funzioni continue e (quasi) Riemann integrabili (che sono riassunte nel grafico a pagina 9).

Ci ricolleghiamo dunque al famoso esempio dei "razionali ingrassati".

Indice

1 L^∞ e C^0

Sappiamo che $L^\infty(\Omega)$ è lo spazio di Banach dotato della norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{supess}_x |f(x)| \ .$$

Scriveremo talvolta $\|f\|_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{L^\infty}$ per semplificare la notazione. Propriamente parlando, $L^\infty(\Omega)$ è un insieme di classi di equivalenze; quando parleremo di una $f \in L^\infty(\Omega)$, intenderemo però che f è una funzione, e non una classe di equivalenza. Nello stesso spirito scriveremo inclusioni come $C^0_c(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Lo spazio delle funzioni continue e limitate $C^0_b(\Omega)$ è anch'esso un Banach, se dotato della norma

$$\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$$

usata nella convergenza uniforme.

C^0_b è un sottoinsieme dello spazio vettoriale $B_b(\Omega)$ delle funzioni limitate e Boreliane; anche questo spazio è di Banach, se dotato della norma $\|f\|_\infty$. In questo spazio B_b, però, la $\|f\|_\sim$ è una seminorma.

Notiamo che in generale

$$\|f\|_\sim \le \|f\|_\infty$$

2 Funzioni costanti a tratti, e (quasi) regolate

Diciamo che $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è costante a tratti e ha supporto compatto, se esiste una famiglia $I_1, \dots I_n$ di intervalli[1] disgiunti e limitati, e esistono $g_1 \dots g_n \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = g_i$ per $x \in I_i$, e $g(x) = 0$ per $x \notin \bigcup_i I_i$.

Sia V la famiglia di tutte tali funzioni g.

1. Per cominciare, mostreremo che V è uno spazio vettoriale. (Da questo segue che V è lo spazio generato dalle funzioni caratteristiche di intervalli $\mathbb{1}_I$).

Studieremo poi la chiusura di V in $L^p(\Omega)$, e in $B_b(\Omega)$, cioè secondo la norma $\|f\|_\infty$. Spesso, per semplicità, considereremo solo il caso $\Omega = \mathbb{R}$, e il caso Ω intervallo chiuso e limitato (che abbrevieremo dicendo "Ω compatto").

2. V è denso in $L^p(\Omega)$ per $p \in [1, \infty)$

3. Definiamo le ***funzioni regolate***

   $$R \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall x, f \text{ ammette } \lim_{y \to x+} f(y) \text{ e } \lim_{y \to x-} f(y)\}$$

   Supponiamo che Ω sia compatto: mostreremo che $f \in R$ se e solo se

   (R2) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P sottoinsieme finito di Ω, tale che, chiamata I_P la famiglia degli intervalli aperti che compongono $\mathring{\Omega} \setminus P$, per ognuno degli intervalli $(a, b) \in I_P$, $\forall x, y \in (a, b)$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

   Si deduce che, in questo caso la chiusura di V secondo $\|f\|_\infty$ è data dalle *funzioni regolate*. (Si deduce anche le funzioni regolate sono Boreliane e limitate, e dunque $R \subset B_b$)

4. Per il caso $\Omega = \mathbb{R}$: definiamo le funzioni infinitesime all'infinito

   $$F_0(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \text{ misurabile } \mid \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\}$$

   Se $\Omega = \mathbb{R}$, la chiusura di V in B_b secondo $\|f\|_\infty$ è $R \cap F_0$.

[1] è previsto anche il caso in cui uno di questi intervalli possa essere ridotto a un solo punto

5. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile. Definiamo che f ammette *limite essenziale*

$$\widetilde{\lim_{y\to x}} f(y) = L \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \tilde{\forall} y \in (x-\delta, x+\delta)$ si ha $|f(y) - L| < \varepsilon$; similmente definiamo il limite destro $\widetilde{\lim_{y\to x+}} f(y)$ e sinistro $\widetilde{\lim_{y\to x-}} f(y)$

Definiamo

$$\tilde{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \text{ misurabile } \mid \forall x, f \text{ ammette } \widetilde{\lim_{y\to x+}} f(y) \text{ e } \widetilde{\lim_{y\to x-}} f(y)\}$$

Le funzioni in $\tilde{R}$ sono, per così dire, le *funzioni quasi regolate*. Hanno una caratterizzazione simile alla `(R2)`, che si vedrà nel lemma 2.2.

Se Ω è compatto, la chiusura di V in $L^\infty(\Omega)$ è $\tilde{R}$.

6. Per il caso $\Omega = \mathbb{R}$ definiamo

$$\tilde{F_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \text{ misurabile } \mid \widetilde{\lim_{x\to\infty}} f(x) = \widetilde{\lim_{x\to-\infty}} f(x) = 0\}$$

La chiusura di V in $L^\infty(\mathbb{R})$ è $\tilde{R} \cap \tilde{F_0}$.

2.1 Discussioni e dimostrazioni

1. Data $g \in V$, è sempre possibile trovare una famiglia $I_1, \dots I_n$ di intervalli che è una partizione di Ω; in ogni caso si deve avere $g_1 \dots g_n \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) = g_i$ per $x \in I_i$, (; viceversa ogni g soddisfacente a questa regola giace in V.

   Se Ω è illimitato verso $+\infty$ (risp. $-\infty$) allora I_1 (risp. I_2) sarà illimitato verso $+\infty$ (risp. verso $-\infty$); in questo caso avremo $g_1 = 0$ (risp. $g_2 = 0$).

   Siano ora $f, g \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Siano $I_1, \dots I_n$ e $g_1 \dots g_n \in \mathbb{R}$ usati per definire g, e $J_1, \dots J_m$, $f_1 \dots f_m \in \mathbb{R}$ per definire f, come sopra: allora

$$(af + bg)(x) = af_j + bg_i \;\text{ se }\; x \in J_j \cap I_i$$

   Inoltre se $\Omega = \mathbb{R}$, allora la famiglia $(J_j \cap I_i)$ è una partizione con due soli intervalli illimitati, cioè $I_1 \cap J_1$ e $I_2 \cap J_2$, a cui sono associati $af_1 + bg_1 = af_2 + bg_2 = 0$. Similmente se Ω è illimitato verso $+\infty$ (risp. $-\infty$).

2. Vi sono (almeno) due dimostrazioni: usando la densità di $C^0_c(\Omega)$ o delle funzioni semplici. Vediamo la prima.

   Fissiamo $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Esiste una $h \in C^0_c(\Omega)$ tale che $\|f - h\|_{L^p} < \varepsilon$. Sia $A \subset\subset \Omega$ compatto tale che $h = 0$ fuori da A; per semplicità, sia $A = [0, M]$ (a meno di traslazione). La funzione h è uniformemente continua: esiste allora un n tale che se $|x-y| < M/n$ si ha $|h(x)-h(y)| < \varepsilon M^{-1/p}$; definiamo $g \in V$ come $g(x) = h(iM/n)$ se $x \in [iM/n, (i+1)M/n)$, al variare di i intero fra 0 e M: allora

$$\|g - h\|^p_{L^p} = \int_{-M}^{M} |g(x) - h(x)|^p dx \le 2M(\varepsilon^p/M)$$

   così

$$\|f - g\|_{L^p} \le \varepsilon(1 + 2^{1/p})$$

3. Faremo uso del

   Lemma 2.1 *Se f_n è una successione in L^∞ e $f_n \to f$ in L^∞, e fissato $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e per ogni n, esiste*

   $$\widetilde{\lim_{y \to x-}} f_n(y) \stackrel{def}{=} a_n$$

   allora esiste $\lim_n a_n$ e

   $$\widetilde{\lim_{y \to x-}} f(y) = \lim_n a_n$$

   Similmente per $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $\widetilde{\lim_{y \to x+}} f(y)$.

   Nel caso che $f_n \to f$ secondo la norma $\|\cdot\|_\infty$, le precedenti proprietà valgono anche per i limiti "standard".

   La dimostrazione dell'equivalenza "$f \in R$ se e solo se `(R2)`" è molto simile a quella dei casi seguenti: si veda il lemma 2.2 (sostituendo tutti $\widetilde{\lim}$ con $\lim$).

   Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Dato che $f \in R$, esiste P finito tale che per ognuno degli intervalli (a, b) che compongono $\mathring{\Omega} \setminus P$, per ogni $x, y \in (a, b)$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   Definiamo $g \in V$ ponendo $g(x) = \lim_{y \to a+} f(y)$ per $x \in (a, b)$ come sopra; e definiamo $g(x) = f(x)$ se $x \in P$ e se $x \in \partial\Omega$. Allora $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$

4. La dimostrazione è molto simile a quella del caso L^∞ (sostituendo tutti $\widetilde{\lim}$ con $\lim$). Si veda il lemma 2.3, e le dimostrazioni che seguono.

5. **Lemma 2.2** *Sia Ω compatto. Allora $f \in \tilde{R} \iff$*

   per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P sottoinsieme finito di Ω, tale che, chiamata I_P la famiglia degli intervalli aperti che compongono $\mathring{\Omega} \setminus P$, per ognuno degli intervalli $(a, b) \in I_P$, per quasi ogni $x, y \in (a, b)$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   La dimostrazione è un caso particolare del 2.3 (basta prendere $[N, M] = \Omega$).

   Questo secondo lemma immediatamente mostra [2] che, se Ω è compatto, allora la chiusura di V in L^∞ è $\tilde{R}$: data $f \in \tilde{R}$ e fissato $\varepsilon > 0$, definiamo $g \in V$ ponendo $g(x) = \widetilde{\lim_{y \to a+}} f(y)$ per $x \in (a, b)$ per ogni $(a, b) \in I_P$. Allora $\|f - g\|_\sim \le \varepsilon$.

6. **Lemma 2.3** *Sia $\Omega = \mathbb{R}$. Mostriamo che $f \in \tilde{R} \iff$*

   `(~R2)` *per ogni $N < M, \varepsilon > 0$ esiste P sottoinsieme finito dell'intervallo $[N, M]$, tale che, chiamata I_P la famiglia degli intervalli aperti che compongono $(N, M) \setminus P$, per ognuno degli intervalli $(a, b) \in I_P$, per quasi ogni $x, y \in (a, b)$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

   Dimostro $f \in \tilde{R} \Longrightarrow$ `(~R2)`.

   Nel seguito scriviamo

   $$f(x+) \stackrel{def}{=} \widetilde{\lim_{y \to x+}} f(y) \quad e \quad f(x-) \stackrel{def}{=} \widetilde{\lim_{y \to x-}} f(y) \quad .$$

[2] imitiamo il punto 3

Fissiamo $f \in \tilde{R}$, fissiamo $\varepsilon > 0$; per ogni $x \in [N, M]$, siano U_x^+ e U_x^- intorni destro e sinistro (di uguale lunghezza) tali che

$$\tilde{\forall} y \in U_x^+, |f(y) - f(x+)| < \varepsilon\ , \quad \tilde{\forall} y \in U_x^-, |f(y) - f(x-)| < \varepsilon$$

Allora

$$V_x \overset{def}{=} U_x^+ \cup \{x\} \cup U_x^-$$

(al variare di $x \in [N, M]$) è una copertura del compatto $[N, M]$ tramite aperti: esistono dunque finiti punti $P \subset [N, M]$ tali che la famiglia $(V_x)_{x \in P}$ è una copertura finita di $[N, M]$. Fra tutte le famiglie P, scegliamone una minimale rispetto all'inclusione. Siano A, B gli estremi dell'intervallo

$$(A, B) = \bigcup_{x \in P} V_x \ \ .$$

Prendiamo un intervallo (a, b) che compone $(A, B) \setminus P$; supponiamo che $a, b \in P$: allora $U_a^+ \cap U_b^- \neq \emptyset$ (altrimenti $(V_x)_{x \in P}$ non sarebbe una copertura minimale [3]); per quasi ogni $x, y \in (a, b)$ si ha

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(a+)|+|f(a+)-f(z)|+|f(z)-f(b-)|+|f(b-)-f(y)| \leq 4\varepsilon$$

per quasi ogni scelta di $z \in U_a^+ \cap U_b^-$; similmente se $a = A$ o $b = B$.

La dimostrazione $f \in \tilde{R} \Longleftarrow$ (~R2) è più facile. Sia x fissato. Mostriamo che esiste il limite (essenziale) destro. Sia $[N, M]$ grande, in modo che $x \in [N, M)$. Dato $\varepsilon = 1/n$, da (~R2) abbiamo l'esistenza di un P_n; e supponiamo (senza perdita di generalità) che $P_n \subset P_{n+1}$. Dividiamo due casi:

- *per ogni n, $x \notin P_n$. In questo caso, siano $(a_n, b_n) \in I_{P_n}$ gli intervalli per cui $x \in (a_n, b_n)$*
- *per n grande $x \in P_n$; siano allora $(a_n, b_n) \in I_{P_n}$ gli intervalli per cui $x = a_n$.*

In ogni caso, poniamo $s_n \overset{def}{=}$ supess$_{(a_n, b_n)} f$, $i_n \overset{def}{=}$ infess$_{(a_n, b_n)} f$; dato che la famiglia P_n è crescente, allora, sappiamo che gli intervalli (a_n, b_n) sono decrescenti: ne segue che s_n decresce, e i_n cresce. Inoltre per ipotesi (~R2), $s_n - i_n < 1/n$. Questo è sufficiente a mostrare che esiste il limite essenziale destro in x (e questo limite coincide con $\lim_n s_n = \lim_n i_n$).

Notiamo che se la condizione (~R2) nel Lemma 2.3 vale per un intervallo $[N, M]$, allora vale per ogni intervallo in esso contenuto.

Dimostriamo che la chiusura di V in L^∞ è $\tilde{R} \cap \tilde{F}_0$.

- Dal lemma 2.1 ne segue che se $g_n \subset V$ e $g_n \to g$ allora $g \in \tilde{R} \cap \tilde{F}_0 \cap L^\infty$. Così $\overline{V} \subset \tilde{R} \cap \tilde{F}_0 \cap L^\infty$
- Mostriamo che se $f \in \tilde{R} \cap \tilde{F}_0$ allora $f \in \overline{V}$.
  Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dato che $f \in \tilde{F}_0$, allora esiste $M > 0$ tale che per quasi ogni x non in $[-M, M]$, $|f(x)| < \varepsilon$. Dato che $f \in \tilde{R}$, esiste P finito tale che per ognuno degli intervalli (a, b) che compongono $(-M, M) \setminus P$, per quasi ogni $x, y \in (a, b)$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

[3] Ometto la dimostrazione, che non è difficile ma neanche ovvia

Definiamo $g \in V$ ponendo $g(x) = \widetilde{\lim}_{y \to a+} f(y)$ per $x \in (a, b)$ come sopra; e definiamo $g(x) = f(x)$ se $x \in P$ e se $x = \pm M$ [4], e $g = 0$ altrove. Allora $\|f - g\|_{L^\infty} \le \varepsilon$

Ne segue anche che $\tilde{R} \cap \tilde{F}_0 \subset L^\infty$.

3 Funzioni quasi continue

In questa sezione, per semplicità, consideriamo che Ω sia un intervallo compatto; in tutti gli esempi, inoltre, $\Omega = [0, 1]$.

Esistono molti modi diversi di dire che una funzione è "quasi" continua.

3.1 in B_b

All'interno di B_b, possiamo distinguere

- le funzioni a variazione limitata BV
- le funzioni regolate R
- le funzioni Riemann integrabili $\mathcal{I}$

Si ha che

$$V \subset BV \subset R \subset \mathcal{I} \subset B_b$$

con inclusioni proprie. Le dimostrazioni seguono.

3.1.1 BV

È noto che le funzioni a variazione limitata BV sono regolate; inoltre, ovviamente, $V \subset BV$. Ma la funzione $f_6(x) = x \cos(1/x)$ è continua (e dunque regolata) ma non BV: ne segue che BV non è chiuso secondo la norma $\| \cdot \|_\infty$

3.1.2 $\mathcal{I}$

Per definizione, $f \in \mathcal{I}$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists g, h \in V,\ \ \forall x, g(x) \le f(x) \le h(x)\ \ e\ \ \int h - g < \varepsilon \tag{3.1}$$

È facile mostrare allora che

- l'insieme $\mathcal{I}$ è chiuso in B_b. (Si adatti la dimostrazione nella nota 3.4).
- Dalla caratterizzazione `(R2)` (si veda a pagina 2) segue che le funzioni regolate sono Riemann integrabili.

Non si ha però l'inclusione opposta: un esempio è dato dalla funzione $f_7(x) \overset{\text{def}}{=} \cos(1/x)$ che è Riemann integrabile ma non regolata.

Per vedere un altro esempio, ricordiamo inoltre questo risultato negli appunti

Lemma 3.2 *una funzione limitata f è Riemann integrabile se e solo se $f^* \cong f_*$ dove f^* è l'inviluppo semi continuo superiore, e f_* è l'inviluppo semi continuo inferiore.*

[4] questo non ha molto significato in questo caso L^∞, ma è utile per dimostrare il caso B_b

Questo lemma dice che, in un certo senso, le funzioni Riemann integrabile sono *"continue quasi ovunque"*; ma si veda la prossima sezione 3.3.

Sia C l'insieme di Cantor, sia $f = \mathbb{1}_C$. Sia C' l'insieme dei punti di accumulazione di C: questo insieme è più che numerabile. Ne segue che f non è regolata, perché se $x \in C'$ allora o non esiste il limite sinistro, o non esiste il destro,o entrambi. Allo stesso tempo, il lemma precedente mostra che f è Riemann integrabile.

3.2 in L^∞

Possiamo immergere le funzioni continue C^0, [5] le regolate R e le Riemann integrabili $\mathcal{I}$ in L^∞, per ottenere

- $$\widetilde{C^0} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f \cong g, g \in C^0\}$$
- $\widetilde{R}$ (già definito in precedenza)
- $$\widetilde{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f \cong g, g \text{ Riemann integrabile }\}$$

Nota 3.3 *Nella definizione di limite essenziale* $\widetilde{\lim_{y\to x}} f(y) = L$*, che è*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \tilde{\forall} y \in (x-\delta, x+\delta) \text{ si ha } |f(y) - L| < \varepsilon$$

è nascosto un pezzo, in quanto $\tilde{\forall} y$ *significa "*$\exists E \subset \Omega$ *con* $\lambda(E) = 0, \forall y \notin E$*".*

Questo significa che, potenzialmente, l'insieme E può dipendere da ε, δ, x.

Ma, analizzando la dimostrazione del 2.2, si scopre che la proprietà che caratterizza le $f \in \tilde{R}$ *si può anche scrivere nella forma equivalente:*

(∼R2) esiste un $E \subset \Omega$ con $\lambda(E) = 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste P sottoinsieme finito di Ω, tale che, chiamata I_P la famiglia degli intervalli aperti che compongono $\mathring{\Omega} \setminus P$, per ognuno degli intervalli $(a, b) \in I_P$, per ogni $x, y \in (a, b) \setminus E$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Se ne deduce che l'insieme $\widetilde{R}$ *si può anche definire come*

$$\widetilde{R} = \{f \mid f \cong g, g \in R\}$$

(cioè in maniera simile agli altri).

Abbiamo mostrato in precedenza che $\widetilde{R}$ è chiuso (è la chiusura di V). Negli appunti (remark 3.15) è mostrato che $\widetilde{C^0}$ è chiuso.

Inoltre ovviamente $\widetilde{R} \subset \widetilde{\mathcal{I}}$; e l'inclusione è propria, per via dell'esempio $f_7(x) = \cos(1/x)$. (Altre esempi sono nella sezione successiva.)

Allo stesso tempo, $\widetilde{C^0} \subset \widetilde{\mathcal{I}}$, dato che $C^0 \subset \mathcal{I}$.

Proposizione 3.4 *Rimane un ultimo punto da chiarire... come si caratterizza una funzione* $f \in \widetilde{\mathcal{I}}$*?*

Mostreremo ora che $f \in \widetilde{\mathcal{I}}$ *se e solo se tale che*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists g, h \in V,\ \tilde{\forall} x, g(x) \le f(x) \le h(x) \text{ e } \int h - g < \varepsilon \qquad (3.4.*)$$

Da questo segue che $\widetilde{\mathcal{I}}$ *è chiuso in* L^∞.

[5] dato che abbiamo deciso che Ω è compatto le funzioni continue sono limitate

- *La implicazione* $f \in \widetilde{\mathcal{I}} \Longrightarrow$ (3.4.$*$) *è un ovvia conseguenza della* (3.1)*; vediamo l'opposto.*

  Premettiamo un lemma

  Lemma 3.2 *Siano date* $g, h \in V$ *con* $g \tilde{\leq} h$*; allora esistono* $\tilde{g}, \tilde{h} \in V$, $\tilde{h} \leq \tilde{g}$ $\tilde{h}$ *s.c.s. e* $\tilde{g}$ *s.c.i, con* $\tilde{h}(x) = h(x)$ *e* $\tilde{g}(x) = g(x)$ *salvo che eventualmente nei punti di salto, e infine* $\|\tilde{h} - \tilde{g}\|_\infty = \|h - g\|_\sim$

  Fissiamo f *che soddisfi la* (3.4.$*$)*; sia* $\varepsilon = 1/n$ *e siano* $g_n, h_n \in V$ *come da* (3.4.$*$)*; eventualmente alterando* g_n *e* h_n *su un numero finito di punti, possiamo supporre che* g_n *e* h_n *soddisfino i requisiti del lemma precedente; siano ora* $g \stackrel{def}{=} \sup_n g_n$ *e* $h \stackrel{def}{=} \inf_n h_n$*, (che sono rispettivamente s.c.i. e s.c.s.); per la* (3.4.$*$)*, otteniamo che* $\int h - g = 0$*. Si ha allora che* $(h + g)/2$ *è Riemann integrabile e quasi uguale a* f*.*

- *Supponiamo* $f_n \in \widetilde{\mathcal{I}}$ *e* $f_n \to f$ *in* L^∞*; allora* $\varepsilon_n \stackrel{def}{=} \|f_n - f\|_\sim \to 0$*. Siano* $g_n, h_n \in V$ *associate a* f_n *come spiegato in* (3.4.$*$)*. Allora*

  $$\tilde{\forall} x, (g_n(x) - \varepsilon_n) \leq f(x) \leq (h_n(x) + \varepsilon_n)$$

  e $\int (h_n + \varepsilon_n) - (g_n - \varepsilon_n) < 4\varepsilon_n$*: questo mostra che* $f \in \widetilde{\mathcal{I}}$*.*

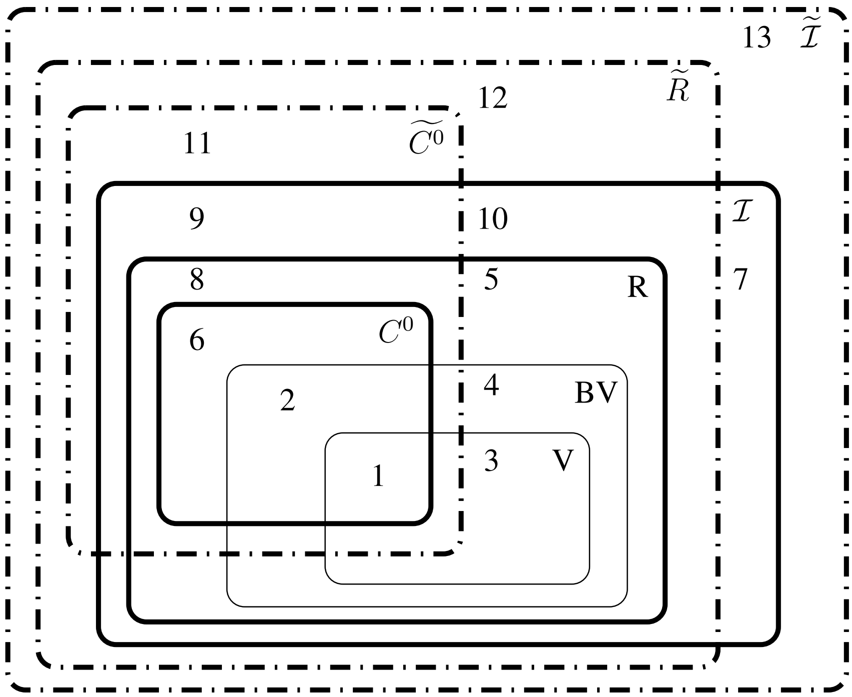
Nota 3.3 *Una funzione* $f \in \widetilde{\mathcal{I}}$ *è* "continua quasi ovunque" *in questo senso:* $\exists E \subset \Omega$ *con* $\lambda(E) = 0$ *tale che la funzione* f *ristretta a* $\Omega \setminus E$ *è continua.*

Lasciamo al lettore il piacere di investigare se il viceversa è vero.

3.3 riassumendo....

Abbiamo visto varie famiglie di funzioni che sono *"continue quasi ovunque"*. Queste definizioni non sono sempre comparabili. Ad esempio, fra le due famiglie $\widetilde{C^0}$ e $\mathcal{I}$ non esiste relazione di inclusione: la funzione f_{11} caratteristica dei numeri razionali è in $\widetilde{C^0}$, ma non è Riemann integrabile; e viceversa una funzione f_3 costante a tratti che abbia un salto in $x = 1/2$ è Riemann integrabile ma non è in $\widetilde{C^0}$.

Questo schema riassume tutte le relazioni di inclusioni fra le famiglie viste. Inoltre, le famiglie chiuse secondo $\|\cdot\|_\infty$ sono in grassetto, quelle chiuse secondo $\|\cdot\|_\sim$ sono tratteggiate.



I numeri si riferiscono ai seguenti esempi

1. tutte e sole le funzioni costanti
2. $f_2(x) = x$
3. $f_3(x) = 0$ per $x \in [0, 1/2]$ e $f_3(x) = 1$ per $x \in (1/2, 1]$
4. $f_4(x) = 2^{-n}$ per $x \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$
5. $f_5(x) = (-1)^n/n$ per $x \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$
6. $f_6(x) = x \cos(1/x)$
7. $f_7(x) = \cos(1/x)$
8. $f_8(x) = 1/n$ per $x = 1/n$, $f_8(x) = 0$ altrove
9. $f_9(x) = 1$ per $x = 1/n$, $f_8(x) = 0$ altrove
   oppure $f_9(x) = \mathbb{1}_C$ la caratteristica dell'insieme di Cantor
10. $f_{10} = f_9 + f_5$
11. $f_{11}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la caratteristica dei razionali
12. $f_{12} = f_{11} + f_3$
13. $f_{13} = f_{11} + f_7$

Rimane un interessante esempio da trovare: una funzione Boreliana e limitata che non sia nella classe $\widetilde{\mathcal{I}}$. Lo vedremo nella seguente sezione.

4 Commenti sui razionali ingrassati

Vogliamo mostrare questi fatti notevoli

1. Sia $C \subset [0,1]$ chiuso con parte interna vuota e $\lambda(C) > 0$. Sia c la funzione caratteristica
$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_C(x)$$
c è discontinua nei punti $x \in C$; e le discontinuità sono eliminabili solo nei punti isolati di C (che sono in un numero al più numerabile); inoltre [6] c non è approssimabile in $L^\infty([0,1])$ con funzioni Riemann integrabili $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

2. Sia $(q_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1}$ una enumerazione dei razionali $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ contenuti in $[0,1]$. Sia $s \geq 0$ nel seguito.

   Sia $A_0 = \emptyset$; per $s > 0$, sia
$$A_s \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \geq 1} B_{n,s}$$
l'insieme dei *razionali ingrassati*, ottenuto centrando in ogni razionale q_n un'intervallo
$$B_{n,s} \stackrel{\text{def}}{=} B(q_n, s2^{-n}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_n - s2^{-n}, q_n + s2^{-n})$$
Sia
$$C_s \stackrel{\text{def}}{=} [0,1] \setminus A_s$$
Allora, per $s \in (0, 1/2)$, gli insiemi C_s sono insiemi chiusi con parte interna vuota e misura positiva.

3. Per ogni fissato s, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, x è contenuto in $B_{n,s}$ solo per un numero finito di n.

4. Le mappe $s \mapsto \lambda(C_s)$ e $s \mapsto \lambda(A_s)$ sono continue per $s \geq 0$.

5. Possiamo dunque costruire una funzione $C(t) : [0,1] \to \mathcal{C}$ negli insiemi chiusi $\mathcal{C}$, che è monotona crescente (rispetto all'inclusione) e tale che $\lambda(C(t)) = t$; e per $t \in [0,1)$, $C(t)$ ha le proprietà del punto (1).

[6] questo risultato va confrontato con il noto risultato di densità, per cui le funzioni $C_c^\infty([0,1])$ sono dense in $L^p([0,1])$ per $p \in [1, \infty)$

Dimostrazioni.

1. Sia c la caratteristica di C. Proponiamo due soluzioni.

   - Usiamo quanto visto nelle sezioni precedenti. Mostriamo che $c \notin \widetilde{\mathcal{I}}$. (Visto che (per la 3.4) la classe $\widetilde{\mathcal{I}}$ è chiusa, ne segue anche che c non è approssimabile in L^∞ con funzioni Riemann Integrabili).
     Infatti, per 3.4, posto $\varepsilon = \lambda(C)/2$, possono essere scelte $g, h \in V$ con $\tilde{\forall} x, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e $\int h - g < \varepsilon$. Siano ora P una partizione di $[0,1]$ in punti e in intervalli aperti (a,b) dove g, h sono costanti. Per ogni $(a,b) \in P$, si ha che o $\lambda\big((a,b) \cap C\big) = 0$, oppure, da $g \tilde{\leq} \mathbb{1}_C \tilde{\leq} h$ otteniamo che $g \leq 0$ e $h \geq 1$ su (a,b). Ma da questo segue che

     $$\int_0^1 h - g = \sum_{(a,b)\in P} \int_a^b h - g \geq \sum_{(a,b)\in P, \lambda\left((a,b)\cap C\right)} (b-a) \geq \lambda(C)$$

   - Questa dimostrazione diretta non necessita degli argomenti visti nelle sezioni precedenti.
     Identifichiamo i punti isolati C' di C; allora, per $x \in C'$ si ha che

     $$\lim_{y\to x} c(y) = 0 \ , \ c(x) = 1$$

     Siano $C'' = C \setminus C'$ i punti non isolati; per $x \in C''$ si ha che

     $$\limsup_{y\to x} c(y) = 1 \ , \ \liminf_{y\to x} c(y) = 0$$

     Ricordiamo che i punti isolati C' sono in numero al più numerabile: dunque $\lambda(C) = \lambda(C'') > 0$.
     Sia g misurabile e limitata e

     $$\|g - c\|_{L^\infty} \leq 1/3 \tag{4.1}$$

     allora per quasi ogni x in C si ha

     $$\limsup_{y\to x} g(y) \geq 1/2$$

     Consideriamo infatti l'insieme

     $$E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in C \mid \limsup_{y\to x} g(y) < 1/2\}$$

     per ciascun $x \in E$ vi è un intorno bucato [7] V_x di x in cui $\sup_{V_x} g \leq 1/2$, e (per ipotesi (4.1)) ne segue che

     $$c(y) \leq g(y) + 1/3 \leq 1/2 + 1/3 < 1$$

     per quasi ogni $y \in V_x$, da cui $c \cong 0$ in V_x; l'insieme $V_E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in E} V_x$ è aperto e si può vedere come unione al più numerabile di insiemi V_x, dunque $c \cong 0$ in V_E. Ora, però, $\{c = 0\} = [0,1] \setminus C$, così da $c \cong 0$ in V_E ricaviamo

[7] cioè, $V_x = (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$

che $\lambda(C \cap V_E) = 0$. Dato che $E \subset C$ (per definizione di E), allora $\lambda(E \cap V_E) = 0$. D'altronde $E' \stackrel{\text{def}}{=} E \setminus V_E$ è composto solo di punti isolati: infatti se $x \in E'$ allora V_x è un intorno che circonda x e non contiene altri punti di E'; dunque E' è al più numerabile, e così $\lambda(E') = 0$. Ne consegue che $\lambda(E) = 0$.

Contemporaneamente, per ogni $x \in C$ si ha

$$\liminf_{y \to x} g(y) \leq 1/3$$

Infatti se $x \in C$ allora (essendo C a parte interna vuota) esiste una sequenza di punti $y_i \notin C$ tale che $y_i \to x$; questi punti giacciono in intervalli aperti I_i disgiunti da C, dove cioè $c = 0$: è dunque possibile trovare in questi intervalli altri punti y_i' dove $g(y_i') \leq 1/3$, e $y_i' \to x$.

Ne consegue che g è discontinua per ogni $x \in C \backslash E$, e, dato che $\lambda(C \backslash E) = \lambda(C) > 0$, si ha che g non è Riemann integrabile.

2. Sia, per semplicità, $q_1 = 1/2$.

   Per $s \in (0, 1]$, sia $A_s \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \geq 1} B_{n,s}$ come definito prima. Sicuramente A_s è aperto, $A_s \supset (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ e dunque $\overline{A_s} \supset [0, 1]$; e $A_1 \supset B(q_1, 1/2) = [0, 1]$. Poniamo $A_0 = \emptyset$. Notiamo che $s \mapsto A_s$ è monotona crescente (rispetto all'inclusione di insiemi).

   Per σ-sub-addittività della misura di Lebesgue λ, abbiamo che

   $$\lambda(A_s) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda(B(q_n, s2^{-n})) = \sum_{n \geq 1} s22^{-n} = 2s$$

   dunque per $s < 1/2$, $\lambda(A_s) < 1$ (e dunque $A_s \not\supset [0, 1]$).

   Sia $C_s \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \setminus A_s$ come già definito. Per passaggio al complementare, deduciamo dalle precedenti affermazioni che: C_s è chiuso; quando $s > 0$ la parte interna $\mathring{C}_s$ di C_s è vuota; inoltre per $s < 1/2$, $C_s \neq \emptyset$ e $\lambda(C_s) \geq 1 - 2s > 0$; inoltre $C_1 = \emptyset$, $C_0 = [0, 1]$. Notiamo che $s \mapsto C_s$ è monotona decrescente.

3. Allo scopo di dimostrare i punti 3 e 4, definiamo la funzione $f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

   $$f_s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{B_{n,s}}(x)$$

   È facile verificare che

   $$\int f_s(x) d\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} 2s2^{-n} = 2s$$

   e dunque f_s è integrabile: ma allora $\lambda\{f_s = \infty\} = 0$ e questo risolve il terzo punto.

4. Sappiamo che

   $$\lim_{s \to 0+} \lambda(A_s) \leq \lim 2s = 0 = \lambda(A_0)$$

   mentre

   $$\lim_{s \to 0+} \lambda(C_s) \geq \lim(1 - 2s) = 1 = \lambda(C_0)$$

Occupiamoci del caso $s > 0$.

Sia $N_s : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$,

$$N_s(x) = \sup(\{0\} \cup \{n \geq 1 \mid x \in B_{n,s}\})$$

Notiamo che $f_s(x) \leq N_s(x)$.

Dato che $s \mapsto B_{n,s}(x)$ è monotono crescente, allora la mappa $s \mapsto \mathbb{1}_{B_{n,s}}(x)$ e anche $s \mapsto f_s(x)$ e $s \mapsto N_s(x)$ sono monotone crescenti.

Se $f_s(x) < \infty$ per un certo x, allora vi è solo un numero finito di n per cui $x \in B_{n,s}$, e dunque $N_s(x) < \infty$. Dunque $\{N_s = \infty\} = \{f_s = \infty\}$, e dunque per il punto terzo $\lambda\{N_s = \infty\} = 0$.

Inoltre $\{N_s \geq 1\} = \{f_s \geq 1\}$ sono gli insiemi dove $x \in B_{n,s}$ per un qualche n; e dunque $\lambda\{N_s \geq 1\} \leq 2s$ (per la dis. di Markov); ma

$$\{N_s = \infty\} = \bigcap_M \{N_s \geq M\}$$

e dunque $\lim_{M\to\infty} \lambda\{N_s \geq M\} = 0$.

Mettendo insieme quanto detto prima, otteniamo che, fissato s' e $\varepsilon > 0$, esiste M tale che

$$\lambda\{f_s \geq M\} \leq \lambda\{N_s \geq M\} \leq \lambda\{N_{s'} \geq M\} \leq \varepsilon \tag{4.2}$$

per ogni $s > 0$, $s \leq s'$.

Usiamo ora questo fatto proficuamente.

Fissiamo un $s > 0$; fissiamo inoltre una successione s_j tale che $s_j \to_j s$. Sia inoltre $s' = \sup_j s_j$; scelto a piacere $\varepsilon > 0$, sia M tale che (4.2).

Data una x,

$$\mathbb{1}_{B_{n,s_j}}(x) \to_j \mathbb{1}_{B_{n,s}}(x)$$

puntualmente salvo che nei due punti estremi di $B_{n,s}$; sia allora

$$E_s \stackrel{\text{def}}{=} \{q_n - s2^{-n}, q_n + s2^{-n} \mid n \geq 1\}$$

l'insieme di tutti gli estremi di tutti i $B_{n,s}$, al variare di n.

Prendiamo un $x \notin (\{N_s \geq M\} \cup E_s)$: allora la serie che definisce $f_{s_j}(x)$ è una somma finita per ogni tale x, (e ciò perché $x \notin B_{n,s}$ per $n > M > N_s(x)$): si ha conseguentemente che

$$f_{s_j}(x) \to f_s(x)$$

L'insieme $(\{N_s \geq M\} \cup E_s)$ ha misura minore di ε arbitrario: ne segue che

$$f_{s_j}(x) \to f_s(x)$$

per quasi ogni x.

Sia ora $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la funzione continua definita da $\phi(x) = x \wedge 1$, cosicchè $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1 = \phi(n)$ per ogni $n \geq 1$. Si constata facilmente che

$$\mathbb{1}_{A_s}(x) = \phi(f_s(x))$$

e dunque, per quasi ogni x

$$\mathbb{1}_{A_{s_j}}(x) \to_j \mathbb{1}_{A_s}(x)$$

Si verifica facilmente che $A_{s_j} \subset [-s', 1+s']$ per ogni j; per il teorema di convergenza dominata,

$$\lambda(A_{s_j}) \to_j \lambda(A_s)$$

Ricordando che

$$\mathbb{1}_{C_s}(x) = 1 - \mathbb{1}_{A_s}(x)$$

per $x \in [0,1]$, otteniamo che

$$\lambda(C_{s_j}) \to_j \lambda(C_s)$$

5. sappiamo che $s \mapsto \lambda(C_s)$ è continua (e decrescente) e che $C_1 = \emptyset$ mentre $C_0 = [0,1]$: dunque, per continuità, $\lambda(C_s)$ assume tutti i valori compresi fra 0 e 1.

   Sia $s = s(t) = \min\{s \in [0,1] \mid \lambda(C_s) \le t\}$.

   Abbiamo definito $C(t) = C_{s(t)}$ come richiesto.