Teorema di Cantor-Bendixson

Claudio Afeltra, Lorenzo Benedini, Davide Lofano, Marco Trevisiol

10 marzo 2014

In questo documento proponiamo due dimostrazioni del teorema di Cantor-Bendixson. Nella prima parte, dopo due lemmi preliminari, dimostriamo l'unicità della decomposizione degli insiemi chiusi espressa dal teorema, a cui seguirà una prima dimostrazione dell'esistenza tratta da un esercizio sul libro "Principi di Analisi Matematica, W. Rudin". Nella seconda parte diamo una breve introduzione della teoria degli ordinali, basandoci sugli appunti del prof. Berarducci del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa (segnaliamo la sua home page al seguente link: http://www.dm.unipi.it/~berardu/), teoria che sfrutteremo per una dimostrazione alternativa dell'esistenza della decomposizione.

Definizione 1 (Spazio metrico separabile)**.** *Uno spazio metrico* (X, d) *si dice separabile se ammette un sottoinsieme denso di cardinalità al più numerabile (la separabilità è una proprietà equivalente ad ammettere una base numerabile* $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *della propria topologia).*

Definizione 2 (Insieme perfetto)**.** *Un insieme si dice perfetto se è chiuso e privo di punti isolati (ossia se è uguale al suo derivato).*

Teorema (Cantor-Bendixson)**.** *Sia* (X, d) *uno spazio metrico separabile e completo. Sia* $\mathcal{C} \subseteq X$ *un chiuso. Allora* $\mathcal{C}$ *è unione disgiunta di un perfetto e di un numerabile. Inoltre tale decomposizione è unica.*

Definizione 3 (Punto di condensazione)**.** *Un punto* x *di uno spazio metrico* (X, d) *si dice di condensazione per* $Y \subseteq X$ *se* $|B_\varepsilon(x) \cap Y| > |\mathbb{N}|$ $\forall\varepsilon > 0$.

Lemma 1. *Un insieme perfetto in uno spazio metrico completo ha cardinalità più che numerabile.*

Lemma 2. *Un sottoinsieme chiuso* P *di uno spazio metrico completo è perfetto se e solo se ogni punto è di condensazione.*

Dimostrazione: Supponiamo che esista un punto x che sia di accumulazione e non di condensazione. Quindi $\exists\varepsilon > 0$ tale che $|B_\varepsilon(x) \cap P| = |\mathbb{N}|$. Sia $r = \varepsilon/2$, sia D la chiusura dell'intersezione con P della palla aperta di raggio r e centro x, vogliamo dimostrare che essa è perfetta. D è chiuso per ipotesi. D non contiene punti isolati perchè la palla aperta intersecata con P non ne contiene in quanto per ogni y in tale palla, esso era di accumulazione per P e esiste un suo intorno tutto contenuto dentro la palla. Da ciò si ha un assurdo per il Lemma 1 in quanto D per costruzione è contenuto in $B_\varepsilon(x) \cap P$ quindi dovrebbe avere cardinalità al più numerabile.

Viceversa se ogni punto è di condensazione ogni punto è anche di accumulazione. Dunque, essendo chiuso, coincide con il suo derivato.

Dimostrazione (Unicità)**.**

Siano P, A e P', A' due coppie di insiemi con P e P' perfetti e A, A' al più numerabili che verificano le ipotesi.

Sia $x \in P\backslash P'$ allora x non è di accumulazione per P' quindi esiste un suo intorno con intersezione nulla con P', ma in ogni suo intorno I, $|\mathcal{C} \cap I| > |\mathbb{N}|$ in quanto x è di condensazione per P quindi per $\mathcal{C}$, ma allora $I \cap \mathcal{C} \subseteq A'$ quindi A' non è numerabile contro le ipotesi.

Quindi $P = P'$ da cui banalmente $A = A'$

Dimostrazione (Esistenza)**.**

Sia P l'insieme dei punti di condensazione di $\mathcal{C}$. $P \subseteq \mathcal{C}$ in quanto $\mathcal{C}$ è chiuso. Consideriamo tutti i $V_i \in \mathcal{V}$ tali che $|V_i \cap \mathcal{C}| \leq |\mathbb{N}|$. Sia W l'unione dei V_i che rispettano questa condizione, vogliamo dimostrare che $P = X\backslash W$.

- $P \subseteq X\backslash W$ Se $x \in P$, supponiamo per assurdo che $x \in W$; dunque per costruzione $\exists i$ tale che $x \in V_i$ e $|V_i \cap \mathcal{C}| \leq |\mathbb{N}|$. Siccome V_i è aperto, $\exists\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq V_i$, ma x è di condensazione, ma ciò è assurdo perchè altrimenti esisterebbe un intorno di X contenuto in V_i la cui intersezione con $\mathcal{C}$ sarebbe più che numerabile, contro la costruzione di V_i.

- $X \backslash W \subseteq P$ Sia $x \in X \backslash W$; supponiamo per assurdo che $x \notin P$. Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $|B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{C}| \leq |\mathbb{N}|$, ma $B_\varepsilon(x)$ è aperto, dunque unione di elementi della base $\mathcal{V}$. Ciascuno di questi elementi ha intersezione con $\mathcal{C}$ di cardinalità al più pari a $|B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{C}|$, dunque al più numerabile, pertanto la loro unione è inclusa in W, ovvero $B_\varepsilon(x) \subseteq W$, quindi $x \in W$, il che è assurdo.

Sia quindi $A = W \cap \mathcal{C}$, esso è chiaramente al più numerabile in quanto W è unione numerabile di insiemi che hanno intersezione con $\mathcal{C}$ al più numerabile e unione numerabile di numerabili è numerabile.

Resta da dimostrare che P è perfetto. P è chiuso perchè W è unione di aperti, quindi aperto, e P è il complementare di W. Inoltre ogni punto di P è di accumulazione per P in quanto ogni punto di P è un punto di condensazione per $\mathcal{C}$ e, avendo eliminato da $\mathcal{C}$ un sottoinsieme numerabile, ogni punto di P è anche di condensazione per P stesso, quindi a maggior ragione è di accumulazione.

Passiamo ora alla dimostrazione basata sugli ordinali.

Definizione 4 (Insieme ordinale)**.** *Un insieme α si dice ordinale se*

- $x \in y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$,
- *la relazione $\in$ ristretta ad α è un buon ordine stretto.*

Definizione 5 (Classe degli ordinali)**.** *La classe degli ordinali è definita come*

$$ON = \{\alpha : \alpha \textit{ è ordinale}\}.$$

Lemma 3. *Gli ordinali sono ben ordinati, ossia tutte le sottoclassi di ON hanno minimo.*

Lemma 4. *Valgono i seguenti enunciati:*

- $\emptyset = 0 \in ON$,
- $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 \in ON$,
- $X \subseteq ON$ *insieme* $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in X} \alpha \in ON$.

Definizione 6. *Si pongono le seguenti definizioni:*

- *$\alpha + 1$ è detto successore di α (inoltre è il più piccolo ordinale maggiore di α),*
- *se α non è successore di nessun ordinale è detto ordinale limite.*

Dimostrazione (Esistenza)**.**

Definiamo una funzione $f : ON \to \mathcal{P}(X)$ che associa ad ogni ordinale un chiuso di X in questo modo:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{C} & \textit{se } \alpha = 0, \\ D(f(\beta)) & \textit{se } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap\limits_{\beta < \alpha} f(\beta) & \textit{se } \alpha \textit{ è limite.} \end{cases}$$

Dimostriamo preliminarmente che:

- $\forall \alpha \in ON,\ f(\alpha)$ è chiuso: altrimenti sia α il più piccolo ordinale che non soddisfa questa condizione: non può essere 0, perché $f(0)$ è chiuso; non può essere successore di un ordinale β, perché $f(\alpha) = D(f(\beta))$ è chiuso in quanto derivato di un insieme; non può essere un ordinale limite perché $f(\alpha) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} f(\beta)$ è intersezione di chiusi.
- $\forall \alpha \in ON, \forall \beta < \alpha, f(\alpha) \subseteq f(\beta)$: altrimenti sia α il più piccolo ordinale che non soddisfa tale condizione: non può essere 0 (in quanto la tesi vale a vuoto); non può essere successore di β, perché $f(\alpha) = D(f(\beta)) \subseteq f(\beta)$, dato che $f(\beta)$ è chiuso, quindi $f(\alpha)$, per transitività, è contenuto in tutti gli ordinali minori; non può essere un ordinale limite perché $f(\alpha) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} f(\beta) \subseteq f(\beta)\ \forall \beta < \alpha$.

Sia $A = \{x \in \mathcal{C} : \exists \alpha \in ON : x \in f(\alpha) \wedge x \notin f(\alpha + 1)\}$. Dimostriamo che $|A|$ è al più numerabile.

Se $x \in A$ allora, per definizione di punto isolato, esiste $V_i \in \mathcal{V}$ tale che $V_i \cap f(\alpha) = \{x\}$. Quindi possiamo definire una funzione $g : A \to \mathcal{V}$ che associa ad ogni punto $x \in A$ un aperto $V_i \in \mathcal{V}$ come sopra. Essa è iniettiva, altrimenti esisterebbero $x \neq y$ tali che $g(x) = g(y) = V_i$, ma allora $x, y \in V_i \cap C$, ma ciò è assurdo per come abbiamo definito V_i. Pertanto, dato che g è iniettiva, $|A| \leq |\mathcal{V}|$ e quindi è al più numerabile.

Abbiamo chiaramente che se $f(\alpha) = f(\alpha + 1)$, allora $f(\beta) = f(\alpha)\ \forall \beta \geq \alpha$, quindi anche $f(\beta) = f(\beta + 1)$ $\forall \beta \geq \alpha$. Supponiamo ora che esista un ordinale α tale che $|\alpha| > |\mathbb{N}|$ e che $f(\alpha) \neq f(\alpha + 1)$. Allora $\forall \beta \leq \alpha$, $1 \leq |f(\beta) \setminus f(\beta + 1)|$ e $f(\beta) \setminus f(\beta + 1) \subseteq A$, e si avrebbe $|A| \geq |\alpha| > |\mathbb{N}| \geq |A|$, assurdo. Chiamiamo allora ζ il più piccolo ordinale tale che $f(\zeta) = f(\zeta + 1)$, che sappiamo esistere.

Sia infine $P = \mathcal{C} \setminus A = \{x \in \mathcal{C} : \forall \alpha \in ON, x \in f(\alpha)\} = f(\zeta)$. Allora segue immediatamente che $D(P) = f(\zeta + 1) = f(\zeta) = P$, cioè che P è un insieme perfetto. Questo conclude la dimostrazione dell'esistenza.

Definizione 7 (Rango di Cantor-Bendixson)**.** *L'ordinale ζ di cui alla dimostrazione precedente è detto rango di Cantor-Bendixson del chiuso $\mathcal{C}$.*

Da ultimo vogliamo mostrare un insieme che abbia rango di Cantor-Bendixson non finito. Per prima cosa definiamo la funzione $\tau : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che $D(\tau(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ per ogni $\mathcal{C}$ chiuso. Ad esempio è possibile definire $\tau(\mathcal{C})$ come l'unione tra $\mathcal{C}$ e, per ogni punto x di $\mathcal{C}$ isolato, l'insieme $\{x + 1/n | n \in \mathbb{N}, n > 2 \wedge 1/n < \varepsilon\}$, dove ε è il raggio dell'intorno con intersezione con $\mathcal{C}$ pari al singoletto $\{x\}$.

Sia adesso $C_0 = \{0\}$, $C_{n+1} = \tau(C_n) + 1$, e $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Per come abbiamo definito τ si ha che $D(C_{n+1}) = C_n + 1$, quindi $D(\mathcal{C}) = \mathcal{C} + 1$; inoltre $C_n + 1 \subseteq C_{n+1}$ quindi anche $D(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. Questo ci dice che $\mathcal{C}$ è chiuso perchè contiene il suo derivato, il suo rango di Cantor-Bendixson non è finito, ma è facile vedere che è esattamente ω.